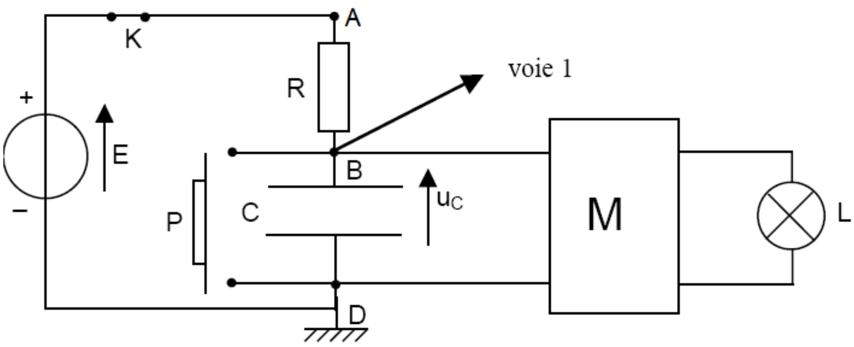
Correction Principe de fonctionnement d'une minuterie (7,5 points)

I – Étude du circuit RC



1) (0,25 point) voir schéma

2) (0,75 point) D'après la loi d'additivité des tensions :

$E = u_{AD} = u_{AB} + u_{BD}$

$E = u_R + u_C$

Loi d'Ohm en convention récepteur :

$u_{AB} = R.i$

$i = \dfrac{dq}{dt}$ et $q = C.u_C(t)$

soit $i = \dfrac{dC.u_C(t)}{dt}$, C étant une constante alors $i = C.\dfrac{du_C(t)}{dt}$

$E = RC.\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$ équation différentielle de la charge du condensateur

3) a) (1 point) $u_C(t) = A\,(1 - e^{-t/\tau}) = A - A.e^{-t/\tau}$ soit $\dfrac{du_C(t)}{dt} = \dfrac{A}{\tau}.e^{-t/\tau}$ insérons ces expressions dans l'équation différentielle : $E = RC.\dfrac{A}{\tau}.e^{-t/\tau} + A - A.e^{-t/\tau} \rightarrow E - A = (RC.\dfrac{A}{\tau} - A).e^{-t/\tau}$

Pour que cette égalité soit vérifiée quelle que soit t, il faut que le terme dépendant du temps (terme en exponentiel) soit nul : $RC.\dfrac{A}{\tau} - A = 0$ soit $\dfrac{RC}{\tau} = 1$ donc $\tau = RC$. Il en découle que A = E.

3) b) (0,25 point) L'équation différentielle établie est : $E = RC.\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$.

En régime permanent, $u_C(t)$ est constante, donc $\dfrac{du_C(t)}{dt} = 0$. Il vient $E = u_C(t)$. Donc $u_C = 30$ V.

3) c) (0,5 point) τ est appelée constante de temps.

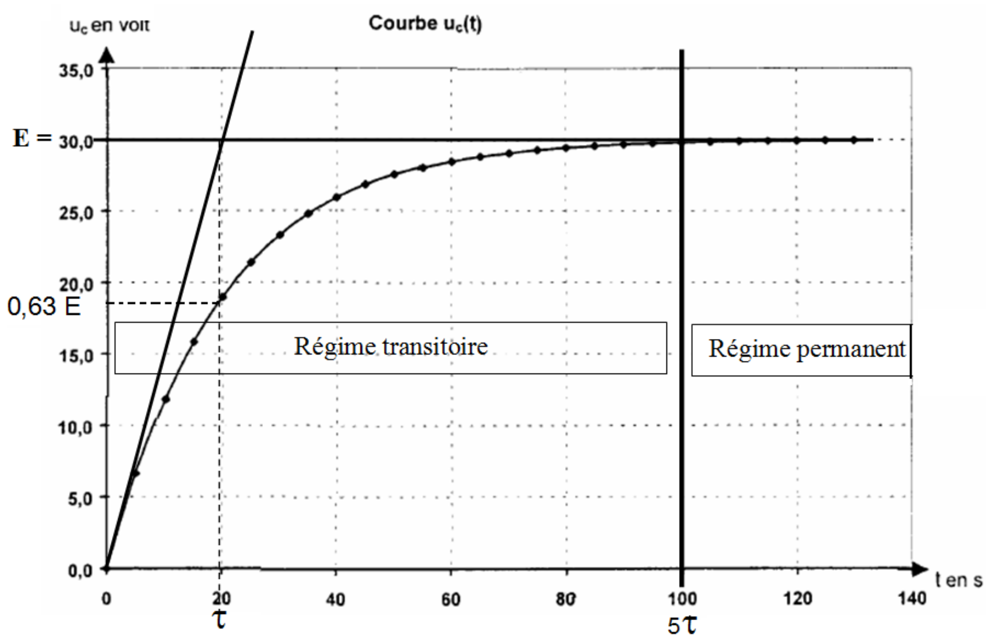
$R = \dfrac{U}{I}$ $\quad C = \dfrac{q}{U}$ $\quad$ Soit $[R\times C] = \dfrac{[U]}{[I]}\dfrac{[Q]}{[U]} = \dfrac{[Q]}{[I]}$ $\quad$ Or $I = \dfrac{Q}{\Delta t}$ $\quad$ soit $[I] = [Q].[T]^{-1}$

$[R\times C] = [T]$ donc RC est homogène à un temps. τ s'exprime en secondes (s).

Ou en utilisant directement la solution de l'équation différentielle :

On sait que $u_c(t) = A\,(1 - e^{-t/\tau})$ et on raisonne sur l'exposant de l'exponentielle $e^{\frac{-t}{\tau}}$. $\dfrac{t}{\tau}$ n'a pas d'unité donc $\tau = RC$ est un temps et s'exprime en secondes (s)

4) (1,25 point)



5) (0,25 point) τ = R.C = $100.10^3 \times 200.10^{-6}$ = 20,0 s

6) (0,5 point) Énergie emmagasinée par le condensateur lorsque $u_C = U_\ell$ = 20 V :

$E_e = ½.C.(U_\ell)^2 = ½ \times 200.10^{-6} \times (20)^2 = 4{,}0.10^{-2}$ J.

II –Méthode d'Euler

1) (0,5 point) L'équation différentielle établie est : $E = RC.\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$.

$E - u_C(t) = RC.\dfrac{du_C(t)}{dt} \rightarrow \dfrac{du_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{RC}.(E - u_C(t))$ soit $\dfrac{du_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{20{,}0} \times (30 - u_C(t))$

2) (1,5 point)

① $u_C(2) = u_C(0) + \left(\dfrac{du_C(t)}{dt}\right)_0 .\Delta t$

$u_C(2)$ = 0 + 1,50×2 = 3,00 V

$u_C(4) = u_C(2) + \left(\dfrac{du_C(t)}{dt}\right)_2 .\Delta t$

③ $u_C(4)$ = 3,00 + 1,35×2 = 5,70 V

t (s)	0	2	4	6	8	10	12	…	20
u_C (t)	0	3,00	5,70	8,14	10,3	12,3	14,1	…	19,6
$\left(\dfrac{du_C(t)}{dt}\right)$	1,50	1,35	1,22	1,09	0,99	0,89	0,80	…	0,52

②

$\left(\dfrac{du_C(t)}{dt}\right)_2 = \dfrac{1}{20{,}0} \times (30 - u_C(2))$

$\left(\dfrac{du_C(t)}{dt}\right)_2 = \dfrac{1}{20{,}0} \times (30 - 3{,}00) = 1{,}35\ \text{V.s}^{-1}$

④

$\left(\dfrac{du_C(t)}{dt}\right)_4 = \dfrac{1}{20{,}0} \times (30 - u_C(4))$

$\left(\dfrac{du_C(t)}{dt}\right)_4 = \dfrac{1}{20{,}0} \times (30 - 5{,}70) = 1{,}22\ \text{V.s}^{-1}$

3) (0,5 point) La courbe tracée en utilisant la méthode d'Euler est assez proche de la courbe expérimentale. Les valeurs calculées sont cependant légèrement supérieures aux valeurs expérimentales.

4) (0,25 point) Pour améliorer la précision de la méthode d'Euler, il faut diminuer la valeur du pas Δt, mais cela présente l'inconvénient de devoir faire plus de calculs.